大学数学のアトリエ｜線形代数　第 3 章　行列式

No.2　行列式の性質

この回のゴール

- 行基本変形によって行列式がどう変わるかを説明でき，その理由を定義から示せる．
- 行基本変形で三角行列に持ち込んで，行列式を計算できる．
- $\det {}^tA = \det A$，$\det(AB) = \det A \det B$ を使える．
- 「A が正則 $\iff \det A \neq 0$」を説明できる．

■ 1. 行に関する性質

以下，A を n 次正方行列とし，第 i 行を $\boldsymbol{a}_i$（行ベクトル）として $\det A = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ のように書く．

定理 1　行に関する性質

(1)（**多重線形性**）1 つの行について，和は分けられ，定数倍はくくり出せる．

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ k\boldsymbol{b} \\ \vdots \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

（$\vdots$ の部分の行はすべて共通）．

(2)（**交代性**）2 つの行を入れ替えると，行列式は -1 倍になる．

(3) 2 つの行が等しい行列の行列式は 0．

(4) ある行に別の行の定数倍を加えても，行列式は変わらない．

(5) ある行がすべて 0 なら，行列式は 0．

【証明】(1) 定義の各項 $\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ は，第 i 行の成分を**ちょうど 1 つ**含む．その成分が $b_{\sigma(i)} + c_{\sigma(i)}$ なら項は 2 つに分かれ，$k\, b_{\sigma(i)}$ なら k がくくり出せる．

(2) 第 i 行と第 j 行（$i < j$）を入れ替えた行列を B とすると，

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots .$$

ここで σ の下の段の $\sigma(i)$ と $\sigma(j)$ を入れ替えた置換を τ とすると，この項は $\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}$ に等しく，No.1 定理 1 (1) より $\operatorname{sgn}\tau = -\operatorname{sgn}\sigma$．$\sigma$ が S_n 全体を動くと τ も S_n 全体をちょうど 1 回ずつ動くので，$\det B = -\det A$．

(3) 等しい 2 行を入れ替えても行列は変わらないが，(2) より行列式は -1 倍になる．よって $\det A = -\det A$，つまり $\det A = 0$．

(4) 第 i 行に第 j 行の k 倍を加えると，(1) より

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + k\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A + k \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A + k \cdot 0 = \det A.$$

（2 つめの行列は第 i 行と第 j 行が等しいので，(3) より 0.）

(5) No.1 練習問題 5 で示した. □

行基本変形と行列式のまとめ

行基本変形	行列式の変化
(I) 2 つの行を入れ替える	-1 倍
(II) ある行を c 倍する	c 倍
(III) ある行に別の行の c 倍を加える	変わらない

計算では，(III) を中心に使って三角行列にするのが基本．(II) は逆向きに「ある行の共通因数をくくり出す」形でよく使う．

■ 2. 列についても同じことが言える

定理 2　転置

$\det {}^tA = \det A$.

【証明】 ${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} なので $\det {}^tA = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$．各項の積を行番号の順に並べ直すと，$a_{\sigma(k)k}$ は $i = \sigma(k)$，$k = \sigma^{-1}(i)$ として $a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$ になる．No.1 定理 1 (3) より $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$ であり，σ が S_n 全体を動くと σ^{-1} も S_n 全体を動く．よって $\det {}^tA = \sum_\rho \operatorname{sgn}\rho\, a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \det A$. □

転置すると行と列が入れ替わるので，**定理 1 は「行」を「列」に読みかえてもすべて成り立つ**．行列式の計算では，行の変形と列の変形を**混ぜて使ってよい**．

注意

逆行列の計算（第 1 章 No.4）や連立方程式の掃き出し（第 2 章）では，列の変形を混ぜてはいけなかった．行列式の計算では，各変形で行列式がどう変わるかさえ追いかければ，行・列どちらの変形を使ってもよい．

■ 3. 行列式の計算

例題 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ を求めよ.

【解答】 (III) の変形だけを使って上三角行列にする（行列式は変わらない）.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{②-①\times 2,\ ③+①}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{③+②\times 2,\ ④+②}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{④-③\times \frac{1}{2}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 2 = -8.$$

例題 2

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$ を因数分解した形で求めよ.

【解答】 第 1 行に第 2 行と第 3 行を加えると（行列式は変わらない），第 1 行がすべて $a+2b$ になる．それをくくり出す.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}.$$

さらに $②-①\times b$，$③-①\times b$ とすると

$$(a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2.$$

注意

- 文字を含む行列式は，サラスの方法で展開してから因数分解するより，**変形しながら共通因数をくくり出す**ほうが楽なことが多い.
- 「全部の行（列）を足すと同じ数が並ぶ」は，よく使う工夫である.

■ 4. 正則性と積の行列式

定理 3　正則性の判定

n 次正方行列 A について，

$$A \text{ が正則} \iff \det A \neq 0.$$

【証明】A を行基本変形で簡約階段行列 R にする．定理 1 より，各変形で行列式は -1 倍・c 倍 $(c \neq 0)$・そのまま，のどれかになるので，$\det R = k \det A$ $(k \neq 0)$ の形になる．したがって $\det A \neq 0 \iff \det R \neq 0$.

第 1 章 No.5 定理 2 より，A が正則なら $R = E$ で $\det R = 1 \neq 0$．正則でないなら R の最後の行は零行で，定理 1 (5) より $\det R = 0$. □

定理 4　積の行列式

n 次正方行列 A，B について

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

特に A が正則なら $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

【証明】**基本行列の場合**：$\det P(i,j) = -1$，$\det Q(i;c) = c$，$\det R(i,j;c) = 1$ である（E に 1 回変形したものだから）．PB は B に行基本変形をしたものなので，定理 1 から $\det(PB) = \det P \cdot \det B$ が成り立つ．

A が正則の場合：$A = P_1 P_2 \cdots P_k$（基本行列の積，第 1 章 No.5 定理 3）と書けるので，上の結果をくり返し使って

$$\det(AB) = \det P_1 \cdots \det P_k \det B, \qquad \det A = \det P_1 \cdots \det P_k.$$

よって $\det(AB) = \det A \det B$.

A が正則でない場合：AB も正則でない（もし AB が正則なら $A\big(B(AB)^{-1}\big) = E$ となり，第 2 章 No.3 練習問題 5 より A は正則になってしまう）．定理 3 より両辺とも 0.

最後の主張は，$AA^{-1} = E$ の両辺の行列式をとって $\det A \det(A^{-1}) = 1$. □

コラム：面積の拡大率として見ると

行列で平面を変換したとき，図形の面積（3 次なら体積）は $|\det A|$ 倍になる．符号まで含めた $\det A$ は**向きつき面積**の倍率で，$\det A < 0$ のときは図形が裏返る（向きが逆になる）．B で変換してから A で変換すれば，向きつき面積は $\det B$ 倍してから $\det A$ 倍される．$\det(AB) = \det A \det B$ はそのことを言っている．逆に $\det(A+B) = \det A + \det B$ は一般には**成り立たない**ので注意．

■ 練習問題

1. 行基本変形を用いて次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

2. 3×3 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$（$\boldsymbol{a}_j$ は列ベクトル）について $\det A = 5$ とする．次の値を求めよ.

(1) $\det(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3)$　(2) $\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ 3\boldsymbol{a}_3)$　(3) $\det(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)$　(4) $\det(2A)$

3. n 次正方行列 A と実数 c について，$\det(cA) = c^n \det A$ を示せ.

4. A を n 次正方行列とする．次を示せ.

(1) $A^2 = A$ ならば，$\det A = 0$ または $\det A = 1$.

(2) n が奇数なら，$A^2 = -E$ となる（成分が実数の）A は存在しない.

(3) P が正則なら，$\det(P^{-1}AP) = \det A$.

5.（考えてみよう）${}^tA = -A$ を満たす正方行列を交代行列という（第 1 章 No.1 練習問題 8）．n が奇数なら，n 次交代行列の行列式は 0 であることを示せ.

■ 練習問題の解答

1.

$$\text{（与式）} \overset{②-①\times 2,\ ③-①,\ ④-①\times 3}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{③+②,\ ④-②}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3.$$

2. 列についての性質（定理 2 により定理 1 を列に読みかえたもの）を使う．(1) 第 1 列と第 2 列の入れ替えなので -5．(2) 第 3 列が 3 倍なので 15．(3) 第 1 列に第 2 列の 2 倍を加えただけなので 5．(4) 3 つの列がすべて 2 倍なので $2^3 \cdot 5 = 40$.

3. cA は A の n 本の行それぞれを c 倍したもの．定理 1 (1) で 1 行ずつ c をくくり出すと $c^n \det A$.

4. (1) 定理 4 より $(\det A)^2 = \det A$ なので $\det A(\det A - 1) = 0$．(2) $A^2 = -E$ なら $(\det A)^2 = \det(-E) = (-1)^n = -1$（$n$ が奇数）．実数の 2 乗は負にならないので矛盾．(3) $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \dfrac{1}{\det P} \det A \det P = \det A$.

5. 定理 2 と練習問題 3 より $\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$．よって $\det A = 0$.